

시그마 필드를 이용한 금융정보 표현 방법

한 창호

경제학박사 / 콰트글로벌 대표

제6회 콰트글로벌 공개강좌

일시: 2011.05.17 16:00~19:00

주제: “Mathematical Finance 입문자를 위한 조언”

주최: 금융공학 온라인교육 전문 『콰트글로벌』

목차

- 시그마 필드란 무엇인가
- 시그마 필드는 어떻게 정보를 표현하는가
- 금융공학에 시그마필드 응용

시그마 필드의 수학적 정의

- 다음과 같은 성질을 만족하는
- 사건(event)들의 모임(collection)을
- 시그마 필드(sigma field) \mathcal{F} 라고 한다.

$$\textcircled{1} \emptyset \in \mathcal{F}$$

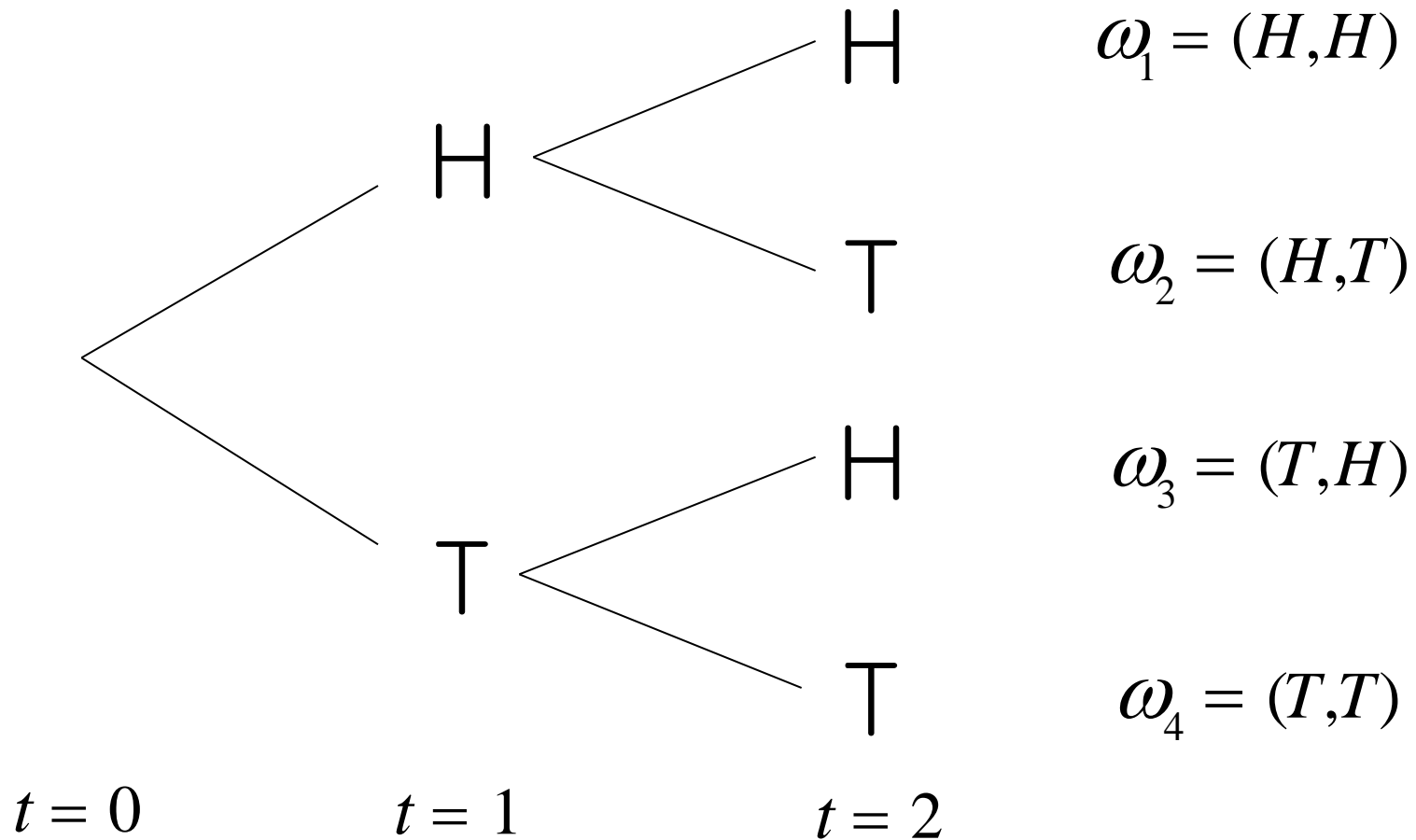
$$\textcircled{2} A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$\textcircled{3} A_i \in \mathcal{F}, i \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

시그마 필드의 용도

- 시그마 필드는 정보를 표현한다.
 - 금융상품의 가격계산에 영향을 미치는 모든 정보들은 시그마 필드를 통해 표현된다.
- 수학적 정의와 그 용도간의 연결 고리는?
 - 직관에 부합하는 설명이 필요!

수리금융을 위한 피카소작 名畫



용어 정리 1

- 실험(Experiment)

현실세계의 현상과 확률모형을 연결하는 개념

- 이론상 무한히 반복 가능함
- 발생 가능한 결과들이 명확히 정의되어 있음

ex) 동전 던지기, 주사위 던지기

용어 정리 2

- 표본(Sample Output)

실험에서 발생 가능한 결과

- $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$ 등으로 표현

ex) 동전 두 번 던지는 실험의 표본

$$\omega_1=(H,H) \quad \omega_2=(H,T) \quad \omega_3=(T,H) \quad \omega_4=(T,T)$$

용어 정리 3

- 표본공간(Sample Space)

해당 실험의 표본 전체 집합

- Ω 로 표현

ex) 동전 두 번 던지는 실험의 표본 공간

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(H,H) (H,T) (T,H) (T,T)\} \\ &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\end{aligned}$$

용어 정리 4

- 사건(Event)

표본들의 집합(표본공간의 부분집합)

- 실험결과가 어떤 사건에 속하면 해당 사건 발생했다고 함
- 공집합, 단일 표본으로 구성된 집합, 전체집합(표본공간) 등
- 필요에 따라 적절한 의미를 부여할 수 있음

ex) 뒷면이 적어도 한번 이상 나온 사건

$$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{(H,T), (T,H), (T,T)\}$$

용어 정리 5

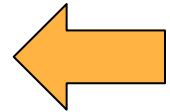
- 모임(Collection)

집합을 원소로 하는 집합

- 사건들의 집합

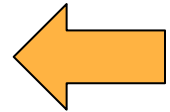
ex) $\{\emptyset, \Omega\}$

$\{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$



$t=0$ 에서의 정보

- 동전을 던지지 않으면 아무런 결과도 발생않함
 - 이를 공집합 \emptyset 로 표현
- 동전을 던지면 표본공간에 속한 결과가 발생함
 - 이를 전체집합 Ω 로 표현
- $t=0$ 에서의 정보 \mathcal{F}_0
 - $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$



$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ 는 시그마 필드인가?

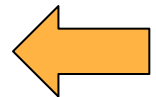
- YES

$$\emptyset \in \mathcal{F}_0$$

$$\emptyset \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}_0$$

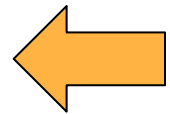
$$\emptyset \in \mathcal{F}_0, \Omega \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \emptyset \cup \Omega = \Omega \in \mathcal{F}_0$$

- $\{\emptyset, \Omega\}$ 는 최소의 시그마 필드이다.



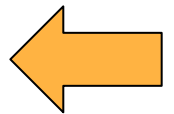
$t=1$ 에서의 정보

- H가 나온 경우 : $\{\omega_1, \omega_2\}$ 사건 발생
 - $\omega_1=(H,H)$ 또는 $\omega_2=(H,T)$ 가 발생
 - $t=1$ 에서 ω_1 인지 ω_2 인지 구별 불가능
- T가 나온 경우 : $\{\omega_3, \omega_4\}$ 사건 발생
 - $\omega_3=(T,H)$ 또는 $\omega_4=(T,T)$ 가 발생
 - $t=1$ 에서 ω_3 인지 ω_4 인지 구별 불가능



$t=1$ 에서 구별 가능한 정보

- H가 나온 경우 $\{\omega_3, \omega_4\}$ 이 발생하지 않았음
 - H가 나온 경우 ω_1 인지 ω_2 인지는 구별 불가능
- T가 나온 경우 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 이 발생하지 않았음
 - T가 나온 경우 ω_3 인지 ω_4 인지는 구별 불가능
- $t=1$ 에서는 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 와 $\{\omega_3, \omega_4\}$ 를 구별 가능함.
 - 사건 속의 표본간 구별 불가능, 사건간 구별 가능
- $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$
 - $t=1$ 에서의 정보는 $t=0$ 에서의 정보를 포함



\mathcal{F}_1 은 시그마 필드인가?

- YES

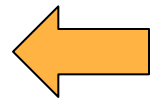
$$\emptyset \in \mathcal{F}_1$$

$$\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \{\omega_1, \omega_2\}^c = \{\omega_3, \omega_4\} \in \mathcal{F}_1$$

$$\{\omega_3, \omega_4\} \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \{\omega_3, \omega_4\}^c = \{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}_1$$

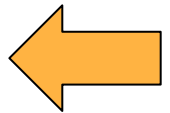
$$\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}_1, \{\omega_3, \omega_4\} \in \mathcal{F}_1$$

$$\Rightarrow \{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_3, \omega_4\} = \Omega \in \mathcal{F}_1$$



$t=2$ 에서의 정보

- $t=2$ 에서는 $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_4\}$ 구별 가능함
 - (H,H) 가 나온 경우 : $\{\omega_1\}$ 사건 발생
 - (H,T) 가 나온 경우 : $\{\omega_2\}$ 사건 발생
 - (T,H) 가 나온 경우 : $\{\omega_3\}$ 사건 발생
 - (T,T) 가 나온 경우 : $\{\omega_4\}$ 사건 발생



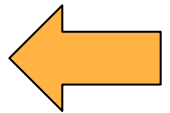
$t=2$ 에서의 정보집합

- $t=2$ 에서의 정보집합 F_2

$$F_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}\}$$

- 그런데, F_2 는 시그마 필드가 아님

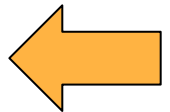
- $\{\omega_1\} \in F_2$ 이지만 $\{\omega_1\}^c = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \notin F_2$



정보집합 F_2 에서 빠진 정보 1

- 각 사건 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}$ 의 발생은
- 각각 $\{\omega_1\}^c, \{\omega_2\}^c, \{\omega_3\}^c, \{\omega_4\}^c$ 의 미발생을 의미
- 따라서, $t=2$ 에서는 다음도 구별 가능한 정보임

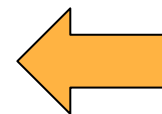
$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$



정보집합 F_2 에서 빠진 정보 2

- $t=2$ 에서 H 가 나온 것은 $\{(H,H),(T,H)\}=\{\omega_1,\omega_3\}$
사건 발생을 의미
- $t=2$ 에서 T 가 나온 것은 $\{(H,T),(T,T)\}=\{\omega_2,\omega_4\}$
사건발생을 의미
- 따라서, $t=2$ 에서는 다음도 구별 가능한 정보임

$$\{\omega_1,\omega_3\}, \{\omega_2,\omega_4\}$$



정보집합 F_2 에서 빠진 정보 3

- $t=1$ 에서 나온 면과 $t=2$ 에서 나온 면이 동일한 사건 발생

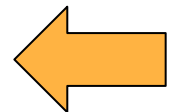
$$\{(H,H),(T,T)\}=\{\omega_1,\omega_4\}$$

- $t=1$ 에서 나온 면과 $t=2$ 에서 나온 면이 상이한 사건 발생

$$\{(H,T),(T,H)\}=\{\omega_2,\omega_3\}$$

- 따라서, $t=2$ 에서는 다음도 구별 가능한 정보임

$$\{\omega_1,\omega_4\}, \{\omega_2,\omega_3\}$$



$t=2$ 에서 구별 가능한 정보

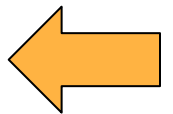
$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}$

$\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}$

$\{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 = & \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \\ & \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\} \\ & \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}\} \end{aligned}$$



\mathcal{F}_2 는 시그마 필드인가?

- Yes

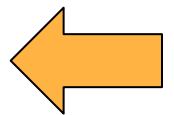
$$\emptyset \in \mathcal{F}_1$$

$$\{\omega_1\} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \{\omega_1\}^c = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \in \mathcal{F}_2$$

$$\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \{\omega_1, \omega_2\}^c = \{\omega_3, \omega_4\} \in \mathcal{F}_2$$

$$\{\omega_1, \omega_3\} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \{\omega_1, \omega_3\}^c = \{\omega_2, \omega_4\} \in \mathcal{F}_2$$

$$\{\omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \{\omega_2, \omega_3\}^c = \{\omega_1, \omega_4\} \in \mathcal{F}_2$$



시그마 필드의 의미

- 주어진 상황에서 구별 가능한 정보를 빠짐 없이 기록 가능하게 해주는 최소한의 조건을 제공

Filtration

- 각 시점 시그마 필드들의 집합은 시간에 따라 정보가 전개되어 가는 과정을 보여주는데, 이를 필터레이션(Filtration)이라고 한다.

$$F = \{F_0, F_1, F_2\}$$

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2$$

금융공학에서 시그마필드 응용

- t 시점에서 트레이더 A 가 트레이더 B 보다 더 많은 정보를 가지고 있다:

$$\mathcal{F}_t^A \supset \mathcal{F}_t^B$$

- 정보에 따라 파생상품의 가격이 달라진다.

$$\text{EuropeanCall} = e^{-r(T-t)} E^Q \left((S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t \right)$$